Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45 rue des Saints-Pères 75006 Paris

Séries temporelles

DM1

Exercice 1

1. Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ deux processus du second ordre faiblement stationnaires. On suppose que $\mathrm{Cov}(X_s, Y_t) = 0$, pour tout $s, t \in \mathbb{Z}$. Montrer que $Z_t = X_t + Y_t$ est un processus faiblement stationnaire et exprimer sa fonction d'auto-covariance en fonction de celles des processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.
2. Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc $\mathrm{BB}(0, \sigma^2)$. On pose $X_t = (-1)^t \varepsilon_t$, $t \in \mathbb{Z}$. Montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est encore un bruit blanc $\mathrm{BB}(0, \sigma^2)$.
3. La somme de deux processus stationnaires est elle toujours stationnaire ?

Exercice 2 Soit $\{A_k\}_{1\leq k\leq n}$ des variables aléatoires de carré intégrable vérifiant

$$\mathrm{Cov}(A_k, A_l) = \sigma_k^2 \delta_0(k-l)$$

et $\{\phi_k\}_{1\leq k\leq n}$ des variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[-\pi, \pi[$, indépendantes des $\{A_k\}_{1\leq k\leq n}$. On définit le processus

$$X_t = \sum_{k=1}^{n} A_k \cos(\lambda_k t + \phi_k), \qquad t \in \mathbb{R}$$

où les $\{\lambda_k\}$ sont des réels.

1. Montrer que X est un processus du second ordre.
2. Déterminer la fonction moyenne m_X et la fonction de covariance C_X de X.
   Justifier que le processus X est faiblement stationnaire et que sa fonction d'autocovariance est
   $$\gamma_X(h) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 \cos(\lambda_k h), \qquad h \in \mathbb{R}.$$
3. On suppose maintenant que $n = 2$, que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ et que $\lambda_1 = \frac{\pi}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{\pi}{3}$.
   Calculer la prédiction linéaire $\mathbb{EL}[X_t | X_{t-1}, X_{t-2}]$.

Exercice 3 Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de carré sommable et telles que $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$ et $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \sigma^2$, pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que si ξ est une variable aléatoire indépendante de $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et telle que $\mathbb{E}[\xi^2] = \alpha^2$ alors le processus $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini par $Z_t = \xi\varepsilon_t$, $t \in \mathbb{Z}$, est un bruit blanc centré de variance $\alpha^2\sigma^2$.
2. On suppose que U^2 est non constante. Les variables $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sont elles toujours indépendantes ? On pourra calculer $\mathbb{E}[Z_0^2 Z_1^2]$.
3. Soit $\theta \in]-1, 1[$. On pose $\psi_k = \theta^k$ si $k \geq 0$ et $\psi_k = 0$ si $k < 0$. Justifier que pour tout $t \in \mathbb{Z}$, la variable $X_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k Z_{t-k}$ est bien définie et que le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est du second ordre, stationnaire, centré et causal. On fera précisément référence aux résultats et notions vues en cours.
4. Calculer la fonction d'auto-covariance γ_X du processus X.
5. Déterminer $\mathbb{EL}(X_t | X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-n})$.