1 Ensembles et applications

Questions de cours

1. Si $f \circ g$ est injective, que dire de g ? (idem surjective). Montrer qu'on ne peut rien dire sur f (resp. idem).
2. Montrer que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ et idem pour $\cap$. Montrer que ce n'est pas vrai pour l'image directe (pour $\cap$).
3. Montrer qu'il n'y a pas forcément unicité de l'inverse (à gauche ou à droite) si ce n'est pas inversible. Exercice : donner un exemple où il y a une infinité d'inverses différents.
4. Est-ce que $A \cup B - B = A$?

Exercices

1. Définition de l'équipotence. C'est une relation d' "équivalence". Si $X \cong Y$ alors $\mathcal{P}(X) \cong \mathcal{P}(Y)$. On définit $X + Y$ par $X + Y = X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}$, montrer que $P(X+Y) \cong P(X) \times P(Y)$. Montrer que $P(X \times Y) \cong P(X)^Y$ (Ageron)
2. Soit E un ensemble non vide, et A, B deux parties de E. À quelle CNS l'application $P(E) \longrightarrow (P(E))^2 : X \mapsto (X \cup A, X \cup B)$ est-elle injective ? Peut-elle être surjective (non, on ne peut pas avoir $\emptyset \times \emptyset$ et $E \times E$) ? (Marc Sage).

   Correction : supposons que $x \in A \cap B$. Alors $A - \{x\}$ et A ont la même image par la flèche. Donc $A \cap B = \emptyset$. Réciproquement, sous cette condition, si $X \cup A = X' \cup A$ et $X \cup B = X' \cup B$, alors $X = X'$. (Marc Sage)

2 Logique, récurrence et relations binaires

Questions de cours

1. Nier l'uniforme continuité d'une fonction sur un segment. Donner l'exemple d'un ordre partiel.
2. Montrer la caractérisation de la borne supérieure pour les ordres totaux.
3. Si R est une relation binaire sur A^2, on note R^{-1} la relation binaire "symétrique" $xRy \iff yR^{-1}x$. Symétrique par rapport à quoi ? Que dire de R^-1 si R est une relation d'équivalence ? D'ordre ? Si R n'est pas une relation d'ordre, peut-on avoir R^{-1} relation d'ordre ? Si l'ordre est total, que dire R^{-1} ? Si R est une relation d'équivalence, comparer les classes d'équivalences de R et de R^{-1}. Que peut-on en déduire sur R et R^{-1} ?
4. Soit E, F deux ensembles totalement ordonnés. Soit $f : E \longrightarrow F$ strictement croissante. Montrer que f est injective, que l'on peut considérer $f : E \longrightarrow f(E)$ comme une bijection et que f^{-1} est (strictement) croissante.
5. (RF) Soit f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs réelles. Exprimer "en langage formalisé" que f garde un signe constant sur I, puis donner la négation. Écrire "en langage formalisé" ce que signifie f monotone, et donner la négation.
6. (RF) Formule du binôme : si m et n sont deux entiers ($m \geq n$), montrer que $m^r - n^r \geq (m-n) \times r$, et qu'il n'y a égalité que si $r = 1$ et $m = n + 1$.
7. (RF) Définissons sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une relation $f \leq g$ si $f(x) \leq g(x)$ quelque soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que c'est un ordre. Est-il total ? Une partie majorée et non vide de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ possède-t-elle une borne supérieure ? Rép : oui prendre la borne sup point par point.

Exercices

1. Un bon ordre vérifie : toute partie non vide admet un plus petit élément. Exemple d'un ordre qui n'est pas un bon ordre (tous les ordres partiels : montrer. Mais donner un contre-exemple total : celui sur $\mathbb{R}$). Montrer que dans un ensemble bien ordonné, toute partie majorée admet une borne supérieure (c'est la définition d'une borne supérieure : plus petit des majorants). Si $\geq$ est un bon ordre, est-ce que $\leq$ est un bon ordre (non, cf. $\mathbb{N}$) ? Donner un exemple d'ordre tel que $\geq$ et $\leq$ soient des bons ordres (on peut prendre un ensemble fini, ou bien $\mathbb{Z}$ avec deux points au bout).
2. Soit E un ensemble et $<$ une relation d'ordre sur E. On dit que x est un élément maximal s'il n'admet pas de majorant. Montrer que si l'ordre est total, tout élément maximal est un plus grand élément (et réciproquement). Donner un exemple où il y a une infinité d'éléments maximaux distincts (on

peut en construire facilement : prendre $\mathbb{N}$ sans ordre. De façon plus raisonnable : $\mathbb{N}-\{1\}$ avec l'ordre partiel de divisibilité inversé). Donner un exemple où l'ordre est partiel mais où il y a un unique élément maximal (reprendre les exemples précédents, rajouter 1).

3. Si R est une relation binaire sur $A \times B$, on définit $\overline{R}$ sur $A \times B$ par $x\overline{R}y \iff Non(xRy)$. Que dire de $\overline{R}$ si R est une relation d'équivalence ? (rien, elle est simplement irréflexive). On dit que R est une relation d'ordre strict si R est irréfléxive et transitive. Montrer qu'une relation d'ordre strict est antisymétrique. Si R est une relation d'ordre strict total, montrer que $\overline{R}$ est une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?
4. Montrer qu'il existe deux irrationnels a et b tels que a^b est rationnel (Ageron). Correction : montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Puis considérer $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$...
5. (RF) Montrer que $\sum_0^{n-1} k! \leq n!$. Preuve : par récurrence sur n on se ramène à établir que $(n+1)! \geq 2(n!)$.
6. (RF) Soient a, a', b, b' des rationnels positifs vérifiant $a + \sqrt{b} = a' + \sqrt{b'}$. Montrer que si $\sqrt{b}$ est irrationnel, alors $a = a'$ et $b = b'$. (Donner un contre-exemple sinon..)
7. (Ageron) Soit $(X, \leq)$ un ensemble ordonné. On appelle "segment initial" de X toute partie A de X tel que $x' \leq x \in A \Longrightarrow x' \in A$. Montrer que $seg(a) = x \in X, x < a$ est un segment initial. C'est le segment initial "principal" défini par a. Montrer que dans un ensemble bien ordonné, tout segment initial est principal ou est X tout entier (si ce n'est pas X tout entier, on peut considérer le plus petit élément qui n'est pas dedans). Si X et Y sont bien ordonnés, on dit que X est subordonné à Y s'il est isomorphe à un segment initial de Y (isomorphe i.e. respecte l'ordre (et dans les deux sens, mais la croissance de f entraîne celle de f^{-1} pour des ordres totaux, donc a fortiori pour des bons ordres)). Montrer que la stricte subordination (i.e. isomorphe à un segment initial strict) est antiréflexive. Montrer que c'est un ordre (strict) total, et que tout ensemble d'ensembles bien ordonnés (vus à automorphisme près) muni de cet ordre est bien ordonné (difficile).

   Correction : L'anti-réflexivité découle de la "rigidité" des bons ordres : tout automorphisme est trivial. On remarquera que $f(x) \geq x$ quelque soit x (considérer le plus petit élément parmi ceux qui nieraient cette inégalité). La transitivité OK. Pour montrer que l'ordre est total : si E n'est pas plus grand strictement que E', on considère le plus petit élément a à partir duquel on ne peut pas définir un isomorphisme de $seg(a)$ vers une partie de E', c'est forcément tout le monde, etc.

   Soit M un ensemble d'ensembles bien ordonnés, muni de cet ordre total. Soit A une partie non vide de M, soit $a \in A$. Si c'est le plus petit, on a terminé. Sinon, on considère ceux qui sont plus petits, et on considère l'ensemble des éléments de a correspondant aux segments initiaux donnés par la définition de la relation d'ordre. C'est non vide, on prend le plus petit, terminé.

3 Nombres complexes, trigonométrie

Questions de cours

1. Montrer l'inégalité triangulaire dans les deux sens : $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$ et $|z + z'| \leq |z| + |z'|$. Condition d'égalité ? faire un dessin..
2. Si z est un complexe, montrer que $|\Re(z)| + |\Im(z)| \leq \sqrt{2}|z|$.
3. Montrer qu'il n'y a pas de relation d'ordre total sur $\mathbb{C}$ compatible avec les opérations (comparer i et 0). Citer un ordre total sur $\mathbb{C}$.

Exercices

1. Calculer $\sum_{k=0}^{8} \cos \frac{(2k+1)\pi}{19} = -\frac{1}{2}$. (X 2007)
2. Calculer $\frac{(5+i)^4}{(239+i)(1+i)} = 2$. En déduire une identité vérifiée par π. (X 2007)
3. Soient A, B, C, D quatre points du plan euclidien. Montrer que $AC.BD \leq AB.CD + AD.BC$ (Inégalité de Ptolémée - X2007)
4. Déterminer les nombres complexes z tels que z et ses racines cubiques forment un parallélogramme. (X 2007) On trouve $\pm 2\sqrt{2}i$.
5. Calculer $2\cos(2\pi/5)$. (Écrire que $\sum e^{i\pi/5} = 0$, remarquer que la partie imaginaire est triviale, utiliser une relation trigo pour obtenir $X^2 + X + 2 = 0$.)
6. Soit α, β, γ tels que $e^{i\alpha} + e^{i\beta} + e^{i\gamma} = 0$. Montrer qu'il en est de même pour les angles doubles (factoriser considérer la partie imaginaire, élever au carré).

7. (RF) Exprimer $\cos(\theta/2)$ en fonction de $\cos(\theta)$ pour θ dans le premier quadrant (Rép : $2\cos(\theta/2) = \sqrt{2+2\cos\theta}$. En déduire une expression de $\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}} = 2\cos(\pi/2^{n+1})$ (n radicaux).
8. Si $x_j,\ j \in J$ est une famille finie de réels, montrer que l'on peut en extraire une famille I telle que $|\sum_{i\ \in I} x_i| \geq \frac{1}{2}\sum_{j\in J}|x_j|$. Comment adapter au cas complexe ?

   Réponse : on sépare entre les positifs et les négatifs, et on se rappelle que $\max |a|, |b| \geq \frac{1}{2}|a+b|$ (sinon IT..). Pour les complexes on distingue selon les positions dans le plan : il y a quatre quadrants. On obtient $\frac{1}{\sqrt{24}}$.
9. Soit H le demi-plan de Poincaré (partie imaginaire > 0). Montrer que $A_\theta : z \mapsto \frac{z\cos\theta - \sin\theta}{z\sin\theta+\cos\theta}$ est une bijection de H dans H. Montrer que cela conserve la norme $\frac{|z|^2+1}{\mathrm{Im} z}$. À quelle condition a-t-on $A_\theta = A_{\theta'}$ (rép : $\theta - \theta' \in \pi\mathbb{Z}$).
10. Déterminer les parties finies de $\mathbb{C}$, non vides, stables par les fonctions $z \mapsto z^2+z+1$ et $z \mapsto z^2-z+1$. Réponse : on cherche les points fixes : il y a $\pm i$ pour la première application et 1 pour la seconde. Mais 1 s'échappe pour le premier, tandis la seconde échange i et $\{-i\}$, ainsi la famille $\{i, -i\}$ convient. Montrons que c'est la seule. On peut étudier la partie imaginaire des images, qui vaut $(2x \pm 1)y$. Ainsi on peut remarquer que si $x \neq 0$, l'orbite diverge (car le cas $x > 0$ ou $x < 0$ est symétrique selon les deux applications. La partie réelle montre alors qu'il faut avoir $y^2 = 1$, ce qui donne le résultat.

4 Fonctions usuelles

Questions de cours

1. Donner le domaine de définition, de dérivabilité et la dérivée de arccos, arcsin et arctan.
2. Expression équivalente de Argch$(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.
3. Comment lire sur un dessin le coefficient a dans $x \mapsto e^{ax}$? Dans $x \mapsto C(1-e^{-ax})$?
4. (RF) Combien y a-t-il de points d'intersections entre les courbes $x^{\sqrt{x}}$ et $\sqrt{x}^x$ (réponse, un seul, au point d'abscisse (4,4)). Comparer (= situer) ces courbes (ainsi que celle de $x \mapsto x$) à l'infini et en zéro. Montrer que $\frac{\ln(x)}{x}$ tend vers 0 en 0 (utiliser l'expression intégrale).

Exercices

1. Soit $w_1, \dots, w_n$ des réels et $a_1, \dots, a_n$ des complexes. On suppose que la fonction $F : t \mapsto \sum_{i=1}^n a_i \exp(w_i t)$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est non nulle, montrer que les parties réelles des zéros de F est bornée (sortir les plus hautes et plus basses fréquences) (Cassini - X).

5 Équations différentielles linéaires

Questions de cours

1. Quelles sont les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f(t+u) = f(t)f(u)$ quels que soient t et u réels ?
2. Comment montre-t-on que l'espace des solutions d'une EDL d'ordre i est un espace affine de dimension i ?

Exercices

1. Soit $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive, et a, b deux réels positifs. On suppose que :
$$f(x) \leq \int_1^x \frac{f(t)}{t^2}dt + b$$
   Majorer f. (Source ?)
2. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $I =]0, +\infty[$:
$$(1+x^2)y'(x) + 2xy(x) = \frac{1}{x}$$
   On trouve $x \mapsto \frac{\ln(x)}{1+x^2} = \frac{K}{1+x^2}$ avec K réel. Si on demande à ce que ça vaille λ et 1 on obtient $K = 2\lambda$. Déterminer la tangente en $x = 1$ de la solution f_λ, donnée par : $(y - \lambda) = (\frac{1}{2} - \lambda)(x-1)$. Montrer que ces tangentes sont concourantes quand λ varie (en le point $(2, \frac{1}{2})$). (DS commun)

3. On considère l'équation d'inconnue u $u_{n+1} = a(n)u_n + f(n)$ pour u, a, f des suites réelles. Montrer que l'espace des solutions est un sous-espace affine de dimension 1. Il faudra d'abord établir l'existence d'une solution (facile par récurrence). Résoudre l'équation en faisant varier la constante. (Perso)
4. Résoudre le système différentiel :
$$\int_0^x f(t)dt = x - 1 + g(x)$$
$$\int_0^x g(t)dt = x - 1 + f(x)$$
On trouve $f = g = 1$. (Quercia)
5. Trouver les fonctions g continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant :
$$\frac{1}{2}\int_0^x g^2(t)dt = \frac{1}{x}\left(\int_0^x g(t)dt\right)^2$$
On trouve $\lambda x^{1+\sqrt{2}}$. (Quercia)
6. Trouver (des) solutions à l'équation $f''(x) + f(-x) = x \cos x$. Dériver deux fois. On trouve :
$$\frac{\sin x - x\cos x}{2} + \lambda\ \mathrm{sh} x + \mu \cos x$$
(Quercia)
7. Soit E l'espace vectoriel des fonctions C^∞ dont toutes les dérivées sont bornées. On considère $f \mapsto f + f'$. Montrer que cette application est bien définie, et dire si elle est injective (OUI) et surjective (OUI). (Quercia)
8. Soit f de classe C^2 vérifiant $f'' + f \geq 0$. Montrer que $f(x) + f(x+\pi) \geq 0$. Résoudre, faire varier la constante. (Quercia)

6 Géométrie plane

Question de cours

1. Distance d'un point à un plan, à une droite.
2. Formule d'Al-Kashi.
3. Vecteur normal à un plan, à une droite.

Exercices

1. Soit un polygone convexe z_1, z_n. Montrer que son aire vaut $\frac{1}{4i}\sum_k \bar{z}_k z_{k+1} - z_k \bar{z}_{k+1}$.
2. Montrer que les bissectrices sont concourantes. On pourra vérifier que le barycentre de $(A, a)(B, b)(C, c)$ est un point d'intersection : c'est le centre du cercle inscrit.
3. On choisit un polygone $P_1, \ldots P_n$ et on définit un nouveau polygone où P_i' est l'isobarycentre des P_j (pour j différent de i). Montrer que le polygone converge vers un point à déterminer. (C'est le centre de gravité, comme on peut le voir sur un triangle). Écrire que $GA_i^k = -\frac{1}{k-1}GA_i^{k-1}$. (Quercia)
4. Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$ d'aire strictement supérieure à 1. Montrer qu'il existe u, v dans A tels que $v - u \in \mathbb{Z}^2$ (sinon par translation on remplit plus que le carré). Soit C une partie convexe de $\mathbb{R}^2$, symétrique par rapport à 0, d'aire supérieure à 4, montrer que C contient un point de $\mathbb{Z}^2$ en plus de l'origine (considérer une homothétie et appliquer le résultat précédent).
5. On dispose de n points dans le plan, montrer qu'il y a une droite passant par 0 qui n'en rencontre aucun.
6. Quel est l'intersection de l'hypersphère avec un hyperplan quelconque ? (Rép : une sphère..) Quelle est l'intersection de l'hypercube avec un hyperplan orthogonal à une grande diagonale ? Calculer le volume...
7. On colorie le plan avec deux couleurs, montrer qu'il existe un triangle rectangle isocèle dont les trois sommets sont de la même couleur (prendre un carré et le milieu, si ça ne marche pas on prend un deuxième carré collé). (Dupont)
8. Pourquoi une sphère n'est-elle pas une union finie (dénombrable) de cercles ? Pourquoi le plan n'est-il pas une réunion dénombrable de polygones ? (prendre une droite qui n'est pas dans les pentes des côtés).

7 Géométrie de l'espace

Questions de cours

1. Distance d'un point à un plan.
2. Distance d'un point à une droite.
3. Vecteur normal à un plan, à une droite.

Exercices

1. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ dont l'intersection avec chaque plan est soit un point, soit un cercle, soit vide. Montrer que S est soit vide, soit un point, soit une sphère.

   Si S contient au moins deux points, elle en contient au moins trois, et dans le plan qu'ils définissent S est un cercle. On peut construire successivement, d'abord la sphère recherchée puis montrer par intersections successives que c'est la bonne. L'idée est que une fois que l'on connaît la sphère à obtenir, dès que l'on a trois points de cette sphère dans S, on a aussi le cercle qui passent par eux, mais c'est aussi un cercle de la sphère.
2. Soit $ABCD$ un tétraèdre. Montrer que les droites joignant les milieux de deux côtés opposés ainsi que les droite joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée, sont concourantes. (Il y en a 7, et elles se retrouvent en l'isobarycentre de $ABCD$).
3. Quelle est la distance entre les côtés non coplanaires d'un tétraèdre régulier ? $\frac{a}{\sqrt{2}}$.
4. Dans $\mathbb{R}^3$, minorer le rayon d'une boule contenant n points espacés d'au moins C. Pour $C = 2$ et dans le cas d'un espace euclidien, on trouve $\sqrt{\frac{2(n-1)}{n}}$. Expliquer.
5. Volume du tétraèdre régulier ? $\sqrt{2}/12a^3$.

8 Courbes paramétrées

1. On dit qu'une partie S de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs... Montrer que $\mathbb{R}^2$ privé d'un nombre dénombrable de points est connexe par arcs. Est-ce que c'est vrai si on remplace $\mathbb{R}^2$ par $\mathbb{R}^3$ et points par plans ? Non.. Quel est le bon énoncé alors ? Supposons qu'un capitaine dessine sur le globe les routes qu'il a empruntées. À quelle condition le globe privé des routes reste-t-il connexe par arcs ? (il faut qu'il ne soit pas repassé sur son chemin). On supposera qu'il navigue de façon affine par morceaux. Existe-t-il toujours un plus court chemin ? Non, prendre $\mathbb{R}^2$ privé de l'origine.
2. (Peigne de Dirac) On considère la partie S de $\mathbb{R}^2$ suivante : $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}_+ \bigcup (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \times \mathbb{R}_-^*$. Montrer que ce n'est pas connexe par arcs, i.e. qu'il existe deux points et pas de chemin continu qui les joignent dans S.
3. Montrer qu'il n'existe pas de surjection C^1 de $[0, 1]$ dans le carré. On montre que l'aire de l'image est < 1 en découpant en petits intervalles et appliquant l'IAF. Existe-t-il une surjection C^1 de $\mathbb{R}$ dans le carré ? Si la dérivée est bornée, clairement pas. Sinon, soit M_n une borne sur $[-n, n]$, on voit qu'on peut choisir un découpage tel que l'aire soit inférieure à $1/n^3$ quitte à prendre un découpage très fin. (En fait l'aire est nulle à chaque fois).
4. Montrer qu'il existe des courbes C^1 de longueur infinie.
5. Reconnaître la courbe $t \mapsto (\sin t, \sin t + \cos t)$ (c'est une ellipse).

9 Coniques

1. Soit E un ensemble infini de points qui sont tous deux à deux à distance entière. Montrer qu'ils sont tous alignés. Considérer les hyperboles (ou les ellipses ?) qui passent par trois points non alignés de E, il y en a un nombre fini.. Comment construire $N + 1$ points deux à deux à distance entière mais pas tous alignés ? On peut essayer d'en aligner N avec des abscisses x_k $(k = 0 \dots N-1)$ et de mettre un point à $(0, y_N)$ où y_N doit vérifier : $L_k := \sqrt{y_N^2 + x_k^2} \in \mathbb{N}$ quelque soit k. En particulier, cela nous donne N entiers L_k et x_k $(k = 0 \dots N-1)$ tels que $L_k^2 - x_k^2 = y_N^2 = L_{k'}^2 - x_{k'}^2$ quels que soient k et k'. L'entier y_N^2 s'écrit donc de N manières différentes comme la différence de deux carrés. C'est jouable...

2. Quelle est l'image par $f : z \mapsto \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ de $\{z, 1 \leq |z| \leq 2\}$? On trouve l'ellipse pleine d'axes $\frac{5}{4}$, $\frac{3}{4}$. Pour cela il faut observer que si $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est l'équation d'une ellipse, l'équation de l'ellipse pleine est $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, puis remarquer qu'on a une union d'ellipses emboîtées. On peut aussi étudier $r \mapsto \frac{a}{(r+\frac{1}{r})^2} + \frac{b}{(r-\frac{1}{r})^2}$ qui tend vers l'infini en $r = 1$ (pour $b \neq 0$).
3. Soit $\mathcal{C}$ une hyperbole ou une ellipse (on prendra une ellipse pour le dessin), M et N deux points de $\mathcal{C}$, F un foyer et $\mathcal{D}$ la directrice associée, on note P l'intersection de (MN) avec $\mathcal{D}$, montrer que (PF) est la bissectrice de (FM, FN). Projeter M et N sur la directrice, utiliser Thalès, puis utiliser la définition d'une conique qui assure que les distances à la droite sont proportionnelles à la distance au foyer. Enfin, on a besoin du lemme suivant : si ABC est un triangle et si une droite $\mathcal{D}$ passant par A coupe MN en P, alors $\mathcal{D}$ est la bissectrice de l'angle si et seulement si on a $\frac{PM}{PN} = \frac{AM}{AN}$. Ca se voit par exemple en projetant sur l'autre bissectrice (orthogonalement), avec Thalès + similitude.
4. Montrer que les deux foyers d'une ellipse sont optiquement conjugués (i.e. un rayon qui passe par l'un passe par l'autre). Caractérisation bifocale d'une ellipse -> la bissectrice de (F_1M, F_2M) est orthogonale à la tangente en M à l'ellipse.
5. Théorème de Dandelin :
   (a) Deux tangentes à une même sphère se coupent en un point situé à égale distance des pieds des deux tangentes (Pythagore)
   (b) Montrer que pour tout P, $PF_1 + PF_2$ est constant. Donc la "section conique" est une ellipse.
   (c) Où est la directrice de l'ellipse ? Réponse, sur l'intersection du plan contenant le cercle de tangence Sphère / Cône et du plan de la section conique. Pour cela, il faut voir des triangles semblables, en projetant P sur le plan supérieur et sur la droite candidate, et écrire des égalités de rapport.
6. Montrer que les asymptotes d'une hyperbole sont l'intersection de l'hyperbole projective avec le plan à l'infini.

10 Ensembles finis, dénombrement, entiers

Questions de cours

1. Soit X et Y deux ensembles finis. Montrer que l'un des ensembles Inj(X,Y) et Surj(X,Y) est non vide. Que dire si les deux sont non vides ?
2. Soit X un ensemble fini. Montrer que X et $P(X)$ n'ont pas même cardinal. Exercice : Montrer que c'est vrai pour X quelconque, en fait montrer qu'il n'y a pas de surjection de X dans $P(X)$, mais donner une injection simple.
3. Soit X fini. Y a-t-il plus d'applications de X vers $P(X)$ ou de $P(X)$ vers X ?
4. Quel est le nombre de diagonales d'un polygones à n côtés ? Pour le premier sommet, il y a $n-1$ copains, pour le second il y en a $n-2$.. Donc $n(n-1)/2$.

Exercices

1. Si f va de X fini dans Y, on appelle $P(f, X) = \text{Card}\{x \in X$ qui ne sont pas les seuls antécédents de leur image $\}$ (P comme perte). Que signifie $P(f, X) = 0$? $P(f, X) = \text{Card}X$? Comparer $P(f, X)$ et $P(g \circ f, X)$. Exprimer le cas d'égalité $(P(g, f(X)) = 0)$
2. Argument diagonal de Cantor pour la non-dénombrabilité de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.
3. Soit A un ensemble dont toutes les parties sont soit finies soit cofinies (i.e. de complémentaire fini). Montrer que A est fini. Même question si l'on suppose qu'il existe un n tel que pour toute partition de A en n ensembles, l'un des ensembles est fini (on pourra construire par récurrence une injection de $\mathbb{N}$ dans A). Construire une partition de $\mathbb{N}$ comme un ensemble dénombrable d'ensembles infinis (A_n = l'ensemble des entiers qui possèdent exactement n facteurs premiers).
4. Calculer $\sum_{k=0}^{n} k^3 \binom{n}{k}$.
5. Démontrer sans calcul que $C_n^p \times C_p^k = C_n^k \times C_{n-k}^{p-k}$. J'en choisis p puis k parmi ces p : c'est comme en choisir k et $p-k$ parmi ceux qui restent. Puis montrer par le calcul.
6. Démontrer la formule de Van der Monde : $\sum_{k=0}^{r} C_n^k C_p^{r-k} = C_{n+p}^r$ par un argument de dénombrement. Choisir r objets parmi $n+p$ c'est en choisir un certain nombre k parmi n et un nombre $r-k$ parmi p. On peut retrouver cette identité en considérant le développement de $(1+x)^m(1+x)^n = (1+x)^{m+n}$ et en identifiant les coefficients.

7. (Quercia) Soit E un ensemble ordonné dont chaque partie non vide admet un plus petit et un plus grand élément. Montrer que E est totalement ordonné et fini.
8. Soit $f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N} \ : (p,q) \mapsto 2^p(2q+1)$. Montrer que f est bijective. Expliquer ensuite comment construire une bijection de $\mathbb{N}^n$ sur $\mathbb{N}$. On peut raisonner par récurrence : si on dispose de $\phi_n : \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$, alors $(\phi_2, pr_3, pr_4, \ldots pr_{(n+1)})$ fournit une bijection de $\mathbb{N}^{n+1}$ sur $\mathbb{N}^n$ que l'on peut ensuite composer par ϕ_n.
9. Construire une injection de $\mathbb{N}^n$ dans $\mathbb{N}$ (utiliser les nombres premiers).
10. Densité d'une partie de $\mathbb{N}$. Soit A une partie de N, on note $A_n = A \cap [|0,n|]$ et on note $d(A) = \lim \frac{|A_n|}{n}$ si elle existe. Donner un exemple où $d(A)$ n'est pas défini. Donner un exemple où $d(A) = 1$ mais $A \neq \mathbb{N}$, un exemple où $d(A) = 1$ mais $\mathbb{N} - A$ est infini (en revanche une partie finie a une densité nulle). Montrer que $d(A) = 1 - d(\bar{A})$. Calculer $d(A \cup B)$. Calculer la densité des carrés. Montrons que la densité des nombres premiers est nulle si elle existe (sans utiliser le TNP !) : soit P l'ensemble des nombres premiers (plus $\{1\}$), on cherche à calculer la denstié de P^2. On minore par $|P_n^2/n$ par $\frac{1}{2}\sum_{p \in P_n} \ \frac{1}{p} \frac{|P_{n/p}|}{\frac{n}{p}}$, puis on utilise que la série des inverses des nombres premiers diverge... or une densité est un nombre fini, et même si la suite ne converge pas les $|A_n|/n$ sont bornés par 1.. On peut ainsi montrer qu'un sous-ensemble des nombres premiers dont la série des inverses diverge est de densité asymptotique nulle. En revanche, les entiers pairs ont leur série des inverses divergente mais une densité non nulle : cela tient au fait que dans la minoration ci-dessus on contrôle le nombre de décomposition d'un entier comme produit d'éléments de A par 2 (pq ou qp), ce qui n'est pas possible pour les entiers pairs par exemple.
11. Densité de Schnirelmann. Si A est une partie de N, on note $S(A) = \inf |A_n|/n, n \geq 1$. Une condition nécessaire pour que $S(A) \neq 0$ ($1 \in A$). À quelle condition $S(A) = 1$? Montrer que, pour A et B deux parties contenant 0, si $S(A) + S(B) \geq 1$, alors $A + B = \mathbb{N}$ on pourra montrer que si $|A_n| + |B_n| \geq n$ alors $n \in A + B$. On dit que A est une base d'ordre h si $hA = \mathbb{N}$, donner une condition suffisante pour être une base d'ordre h. Calculer la densité des carrés. Remarque : tout entier est somme de quatre carrés.
12. Nombre moyen de point fixe par permutation ? Ecrire $\frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in S_n}\sum_k \ \delta_{k\sigma(k)}$ et inverser les sommes, puis remarquer que $\sum_{\sigma \in S_n} \delta_{k\sigma(k)} = (n-1)!$
13. Résoudre $a! + b! + c! = d!$.

11 Structures algébriques élémentaires

1. Soit E un ensemble fini, non vide. Montrer qu'une suite n'est jamais injective (vue comme application de $\mathbb{N} \longrightarrow E$). On suppose que E est muni d'une loi interne associative, notée multiplicativement (expliquer ce que ça veut dire). Donner un exemple de structure qui vérifie cette hypothèse (un groupe..). Montrer qu'il existe un élément "idempotent" i.e. vérifiant $e^2 = e$.

   Correction : on peut considérer la suite (a^n). Elle est périodique de période m à partir d'un certain rang n. On peut supposer $m \geq n$, mais alors $a^{2m} = a^m$. (X 2003)
2. Soit X un ensemble. Montrer qu'il est infini si et seulement si quelle que soit la fonction f de X dans X, il existe une partie A de X non vide et distincte de X stable par f. (X 2007)

   Correction : $\Longrightarrow$ si E est infini, considérons $\{a, f(a), f^k(a), \ldots\}$. Si cette suite est périodique, c'est terminé, sinon considérons $\{f(a), \ldots\} \neq E$. Réciproquement si E est fini, considérer un n-cycle.
3. Montrer que pour tout n, il existe un unique sous-groupe fini de cardinal n dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
4. Définition : groupe engendré par une partie S = plus petit sous-groupe qui le contient, caractérisation comme mots sur S, S^{-1}. Soit G un groupe multiplicatif, on note $D(G)$ le groupe dérivé et C le groupe engendré par les carrés. Montrer que $D \subset C$. On suppose que G est engendré par les idempotents, montrer que $D = C$.

   Correction : pour avoir $D \subset C$ on vérifie que $xyx^{-1}y^{-1} = x^2(x^{-1}y)^2(y^{-1})^2$. Si tout élément est produit d'idempotents, on procède par récurrence.
5. Tout sous-anneau de $\mathbb{Q}$ est principal. Soit A un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ et I un idéal de A. Cherchons $m \in I$ minimal, on va montrer que $I = mA$. Si $\frac{p}{q} \ \in I$, on a $p \geq a$, effectuons la division $p = nm + r$, alors $nm + r \in I$ donc $r \in I$ absurde, ainsi $p = nm$ et $\frac{p}{q} =$
6. Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, en déterminer les automorphismes, vérifier qu'ils laissent stable $\mathbb{Q}$.

12 Arithmétique

Questions de cours

1. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Montrer que si $p_1, \dots, p_n$ sont des nombres premiers distincts alors $\sqrt{p_1 \dots p_n}$ est irrationnel (Lemme de Gauss). Cas général : à quelle condition sur m entier naturel a-t-on $\sqrt{m}$ rationnel (Rép : toutes les valuations sont paires).

Exercices

- Formule de Legendre : calculer la valuation p-adique de $n! = \sum_{k=1}^{+\infty} [\frac{n}{p^k}]$.
- $f(f(n)) = n + 2011$ est impossible (passer au quotient), point fixe, impossible.
- Calculer $10^{10^n} (\mod 7) = 4$. (Fermat)
- Montrer qu'il existe un multiple de 1996 dont l'écriture décimale ne comporte que des 4. On cherche $1996 \times m = \frac{4}{9}(10^n - 1)$.
- CNS pour qu'une famille de rationnels soit une famille génératrice de $\mathbb{Q}$ comme $\mathbb{Z}$-module ? Les valuations p-adiques des dénominateurs sont non bornées. On se ramène à trouver les $\frac{1}{p^n}$ pour n arbitrairement grand (Bezout généralisé), montrer qu'au pire on a a/p^n avec a fixé, mais ajouter n/a à a/p^n donne un truc en a'/p^n avec $a' \wedge a = 1$..
- Montrer que la somme de trois cubes consécutifs est divisible par 9.
- Soit p un nombre premier ≥ 5, montrer que $p^2 - 1$ est divisible par 24.
- Montrer que la suite de terme général "dernier chiffre dans l'écriture de n^n en base 10" est périodique (au moins ultimement, à savoir "à partir d'un certain rang"). En calculer une période. Dans le cas général, si r est une base et k un entier, montrer que la suite de terme général "k-ième chiffre dans l'écriture de n^n en base r" est ultimement périodique. Essayer d'en calculer une période.
  Correction : on remarque que le dernier chiffre de n^n en base k est égal à $n^n \mod r$, lui-même égal à $(n \mod r)^n \mod r$. On s'intéresse donc aux suites $m^n \mod r$ pour m entier entre 0 et $r - 1$. Elles sont bien ultimement périodiques, de période $t_{m,r}$. On remarque alors qu'en posant T le ppcm des $t_{m,r}$ $(m = 0 \dots n - 1)$ et de r, on obtient :

  $$(n + T)^{(n+T)} \mod r = (n + T \mod r)^{(n+T)} \mod r = n^{(n+T)} \mod r = n \mod r$$

  donc la suite considérée est ultimement T-périodique. Pour $r = 10$ on trouve $T = 20$. Pour trouver le k-ième chiffre, on procède par récurrence, puisque l'avant-dernier chiffre n'est autre que $(n^n - n^n \mod r) \mod r^2$. Prenons une période pour $n^n \mod r^2$ et une pour $n^n \mod r$ (qui existent par HR, valable quelque soit la base), leur ppcm donne encore une période.
  Peut-on avoir une idée de la période ? Considérons $t_{m,r}$, qui est tel que $m^{j+t_{m,r}} = m^j$ (modulo r) pour tout j suffisamment grand (en fait comme il n'y a que r valeurs possibles et qu'on débute la périodicité au plus tard dès qu'on tombe deux fois sur le même reste, c'est pour au moins pour tout $j \geq r$. On est amené à considéré $m^j(m^{t_{m,r}} - 1) = 0$ (modulo r). On ne sait pas trop quoi dire... Utilisons le théorème chinois, vu qu'on a un isomorphisme d'anneaux

  $$\mathbb{Z}_r \cong \prod_{i=1}^{s} \mathbb{Z}_{p_i^{\alpha_i}}$$

  et la période se lit comme le ppcm des périodes dans chaque facteur. Mais l'égalité $m^j(m^{t_{m,r}} - 1) = 0 \mod p_i^{\alpha_i}$ entraîne que l'un des facteurs est nul (car p ne peut diviser m et $m^d - 1$ donc l'un est inversible et l'autre est nul). Si $m = 0 \mod p_i^{\alpha_i}$ la période est 1. Sinon, il faut résoudre $m^{t_{m,r}} - 1 = 0 \mod p_i^{\alpha_i}$. Comme m est inversible, on sait que l'ordre de m divise l'ordre du groupe des inversibles de $p_i^{\alpha_i}$, à savoir $(p_i - 1)p_i^{\alpha_i - 1}$. Si on ne le sait pas, on peut s'appuyer sur le petit théorème de Fermat, qui assure que $m^{p-1} = 1 \mod p$, élever à la puissance $p^{\alpha_i - 1}$ et montrer que les coefficients binomiaux vérifient $p^{\alpha - 1 - j} | C^j_{p^{\alpha-1}}$ (pour ça, utiliser la formule de Legendre à défaut de trouver plus simple). Finalement, on trouve que la période divise $(p_i - 1)p_i^{\alpha_i - 1}$, et le ppcm des périodes de chaque facteur divise donc le ppcm des $(p_i - 1)$ multiplié par le produit des $p_i^{\alpha_i - 1}$. Comme on doit encore considérer le ppcm avec r, on obtient finalement qu'une période est donnée par $r \times \prod_{i=1}^{s}(p_i - 1)$ (où les p_i sont les facteurs premiers de r), et que la suite est périodique au moins à partir du rang r.
  Remarque : pour avoir une meilleure estimation de la période, on remarque qu'il suffit de considérer le ppcm des ordres dans $\mathbb{Z}^*_{p^\alpha}$, qui est aussi le plus grand ordre d'un élément de ce groupe (puisque l'ordre de ab est le ppcm de leurs ordres dans un groupe commutatif). Mais c'est difficile à savoir, exemple : quels sont les entiers n tels que $\mathbb{Z}^*_n$ soit cyclique n'est pas évident (cf. Perrin).

- Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers. Montrer qu'il n'y a pas de système fini de générateurs de $\mathbb{Z}$ en tant que "monoïde" multiplicatif
- (Oral Ulm) Quel est le nombre de polynômes unitaires du second degré irréductibles de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$?
- Résoudre $a! + b! + c! = d!$ dans $\mathbb{N}^4$

13 Réels

Cours

1. Déterminer les convexes de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense, que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est dense.
3. Montrer que toute suite convergente est bornée, qu'une suite convergeant vers 0 fois une suite bornée converge vers 0.
4. Montrer que $\mathbb{C}$ ne peut pas être muni d'un ordre compatible avec les lois.

Exercices

1. On veut montrer que $\alpha = \arccos(1/3)/\pi$ est irrationnel.
   - Calculer $e^{i\alpha\pi} = (1 + 2i\sqrt{2})/3$.
   - Montrer que α est rationnel ssi il existe un entier n tel que $(1 + 2i\sqrt{2})^n = 3^n$.
   - Écrire $(1 + 2i\sqrt{2})^n = a_n + ib_n\sqrt{2}$ avec $a_n - b_n$ pas divisible par 3.

   (ENS Lyon)
2. Théorème de Beatty : Soit $a, b > 1$ et $E = \{E(na), n \in \mathbb{N}^*\}$, $F = \{E(nb), n \in \mathbb{N}^*\}$. Montrer l'équivalence :
   (a) E et F forment une partition de $\mathbb{N}^*$
   (b) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ et a, b sont irrationnels.
3. Déterminer les morphismes de corps de $\mathbb{R}$. On montre qu'ils conservent $\mathbb{Q}$, qu'ils sont croissants (carré -> carré), donc c'est l'identité.
4. Soit α un nombre complexe algébrique sur $\mathbb{Q}$, de polynôme minimal de degré 2. On note $\mathbb{Q}[\alpha]$ le plus petit sous-corps de $\mathbb{C}$ qui contient α, montrer que $\mathbb{Q}[\alpha] = \{q + r\alpha, q, r \in \mathbb{Q}\}$. Montrer que l'identité et la conjugaison sont les seuls morphismes de corps de $\mathbb{Q}[\alpha]$.
5. Si a, b, c sont trois entiers dont les racines sont irrationnelles, montrer que $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ est irrationnel (éventuellement traiter les cas de deux racines auparavant). Quand a-t-on $\sqrt{q}$ rationnel pour q rationnel ? (toutes les valuations sont paires)
6. Calculer $\prod_2^k (1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n})$.
7. Soit x_i des réels de $[0, 1]$, montrer que $\prod(1 - x_i) \geq 1 - \sum_{x_i}$. (Marc Sage) Changer $x_i \mapsto 1 - x_i$, montrer qu'on a des choses croissantes, et étudier en $x_i = 1$. Par récurrence ça marche très bien (Alia).
8. (ENS) Soit E une partie de $\mathbb{R}(^m)$, un réel $\alpha \geq 0$ est appelé "point de rencontre" si quelque soit la partie finie $p_1, \ldots, p_n$ de E choisie, il existe p et q deux points de E vérifiant que la moyenne des distances des p_i à p (réciproquement à q) est minorée (resp. majorée) par α. Montrer que si E est finie, il existe un point de rencontre.

   Correction : étudier le cas où l'on prend un seul élément, considérer pour chaque élément la plus petite et la plus grande distance, puis le max et le min de ces quantités respectivement, et montrer que $\max\min \leq \min\max$. Puis on passe à deux élements, on fait la même chose et on compare à ceux d'avant (inégalité triangulaire). Finalement on a une intersection finie de trucs et ça donne α.

14 Suites réelles et complexes

Cours

1. Alternative des suites croissantes
2. Suites adjacentes
3. B-W et schéma de preuve.

Exercices

1. On munit l'espace des suites bornées de la norme L^∞, montrer que $\mathbb{Q}^\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{R}^\mathbb{N}$. Rappeler pourquoi une suite qui converge est bornée. Montrer que les suites stationnaires sont denses dans l'ev des suites qui convergent.
2. Étudier $u_n = \sum_{k=1}^n (\frac{k}{n})^n$ (Cassini)
3. Si u est une suite réelle qui converge, est-ce que $[u]$ converge ?(Quercia)
4. Si $\frac{u_n}{1+u_n}$ tend vers 0, il en est de même pour u_n. Même question avec $\frac{u_n}{1+u_n^2}$: CNS u_n bornée (on peut se ramener au cas précédent en multipliant par u_n !). (Quercia)
5. Montrer qu'une suite bornée possédant une unique valeur d'adhérence converge. Application : $x_n + \frac{x_{2n}}{2} \longrightarrow 1 \Longrightarrow x_n \longrightarrow 2/3$. (Quercia)
6. Soit x réel, calculer $\sum_1^n E(kx)/n^2$ (Quercia)
7. Césaro en pondérant par des coefficients binomiaux. (Quercia)
8. Montrer que si l'on considère une partition de $\mathbb{N}$ en un nombre fini d'ensembles infinis tels que le long de chacun u converge vers une même limite. Alors u converge. Contre-exemple dans le cas infini.
9. Exercice 1 d'arithmétique
10. Trouver une une suite telle que $u_n = (n^a)$ et $\ln(n)^a = o(u_n)$ pour tout $a > 0$. (X)
11. Soit u suite réelle qui tend vers $+\infty$, avec $u_{n+1} - u_n \longrightarrow 0$, croissante qui diverge (on a pas vraiment besoin de croissante) . Montrer que $u_n - E(u_n)$ est dense dans $[0, 1]$. (X)
12. Soit u suite réelle avec $u_{n+1} - u_n \longrightarrow 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence est un intervalle.
13. Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie bien ordonnée pour l'ordre induit. Montrer que $\bar{A}$ est bien ordonné.
14. Le complémentaire d'une partie dénombrable est dense.
15. Polytechnique MP* 2000 Soit h croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, tendant vers $+\infty$ en $+\infty$, et telle que $h(x+1) - h(x)$ tend vers 0 en $+\infty$. Soit V l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite de terme général $e^{ih(n)}$ Montrer que V est exactement le cercle trigonométrique. Correction : Si $e^{i\alpha}$ n'est pas valeur d'adhérence alors il existe $\delta > 0$ tel que $|e^{ih(n)} - e^{i\alpha}| \geq \delta$ pour tout n assez grand donc l'ensemble $\cup_{k\in\mathbb{N}}[\alpha - \delta + 2k\pi, \alpha - \delta + 2k\pi]$ ne contient aucun terme de la suite $(h(n))$ pour n assez grand ce qui contredit les hypothèses $h(n) - n \longrightarrow \infty - > +\infty$ et $h(n+1) - h(n) \longrightarrow - > 0$.
16. Soit u une suite à valeurs dans $[0, 1]$ telle que $u_{n+1}(1 - u_n) > \frac{1}{4}$, montrer que u converge vers $\frac{1}{2}$. Si on dépasse $\frac{1}{2}$, on reste au-dessus et on peut majorer $(u_{n+1} - \frac{1}{2})(u_n - \frac{1}{2}) < \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n)$ or u bornée. Tant qu'on est en-dessous, on croît (et on a qu'une seule valeur d'adhérence possible). En fait on a même $u_{n+1}(u_{n+1} - u_n) > 0$...
17. Équivalent de $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.
18. $x_1 = 1$ et $x_{n+1} = 1 + \frac{n}{x_n}$. D.A. à deux termes ($\sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1)$).

15 Fonctions réelles

Questions de cours

1. Montrer que toute fonction se décompose uniquement comme paire + impaire.
2. Théorème de Heine
3. Caractérisation séquentielle de la continuité
4. TVI

Exercices

1. Soit f de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même vérifiant $f(xf(y)) = yf(x)$ et f tend vers l'infini en 0. Montrer que $f(x) = 1/x$. On pourrra calculer $f(1)$, montrer que f est involutive donc bijective, et qu'elle conserve le produit, puis montrer qu'elle est décroissante et continue. (Centrale MP 2000 - Quercia).
2. Soit f une fonction $[1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant $f(x) + \frac{1}{x} \leq f(x + \frac{1}{x}) \leq x$, montrer que $f(x) \sim x$ en l'infini et exhiber une telle fonction f. (Si f est C^1, Rolle). On peut étudier $v_{n+1} = v_n + \frac{1}{v_n}$ (équivalent à $\sqrt{2n}$) ce qui donne d'abord $f(v_n) \geq \sqrt{n/2}$ puis $f(v_n) \geq \sqrt{2n}$ ainsi si f est croissante, ou uniformément continue...

3. Soit $w_1, \dots, w_n$ des réels et $a_1, \dots, a_n$ des complexes. On suppose que la fonction $F : t \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i \exp(w_i t)$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est non nulle, montrer que les parties réelles des zéros de F est bornée (sortir les plus hautes et plus basses fréquences) (Cassini - X).
4. Soient f, g continues. On suppose $f < g$ sur $\mathbb{Q}$. Montrer que $f \leq g$ partout, mais pas forcément strictement. Soit f continue dont la restriction à $\mathbb{Q}$ est strictement croissante, montrer que f est strictement croissante.
5. Déterminer les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui vérifient $f(x^2) = f(x)$.
6. Est-ce qu'une fonction continue et bornée est uniformément continue ?
7. Limite à droite en 0 de $E(1/x)$, $xE(1/x)$, $x^2E(1/x)$.
8. Construire f discontinue partout telle que $|f|$ soit continue. Est-ce la seule façon de faire ?
9. Soit f continue à valeurs dans $\mathbb{Q}$, que dire de f ? Soit $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue avec $\lim_a f = \lim_b f$, montrer que f n'est pas injective. Peut-on trouver f continue qui envoie les rationnels sur les irrationnels et réciproquement ?
10. Définition d'une suite de Cauchy. Montrer que toute suite convergente est de Cauchy. On admet la réciproque sur $\mathbb{R}$ ("$\mathbb{R}$ est complet"). Montrer que si une fonction est UC elle envoie toute suite de Cauchy sur une suite de Cauchy. La réciproque est fausse (prendre x^2). En revanche, si I est un intervalle borné, c'est vrai (prendre une suite qui tend vers la borne, on peut prolonger par continuité). Soit A une partie dense de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue, montrer qu'il existe un unique prolongement continu, et qu'il est même uniformément continu.
11. Quels sont les morphismes de $(\mathbb{R}, +)$ respectant l'inverse ? On montrera qu'un tel morphisme est borné au voisinage de 0, et qu'il est alors continu.
12. Trouver une une fonction f telle que $f = (x^a)$ et $\ln(x)^a = o(f)$ pour tout $a > 0$. (X)
13. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on dit que f est "modérément oscillante" en l'infini si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $A > 0$ et $\delta > 0$ tel que si $x, y \geq A$ et $|x - y| < \delta$ alors $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$. Donner des exemples de fonctions modérément oscillantes (les fonctions UC !). Soit a_k une suite complexe et $g(t) = \sum_{k \leq t} a_k$, montrer que $s(u) = g(\exp u)$ est modérément oscillante à l'infini sous l'hypothèse $a_k = O(\frac{1}{n})$ en majorant grossièrement la tranche de $\sum \frac{1}{k}$. En revanche, si f est continue, elle est modérément oscillante ssi elle est UC (Heine..)
14. Fonctions semi-continues, exemples. Toute fonction sci sur un compact est-elle uniformément sci ? Non car elle serait alors continue. Théorème d'approximation par des fonctions croissantes continues ? ? Ou quelque chose comme ça voir LSR

16 Espaces vectoriels

QDC

1. En rapport avec Fonctions réelles : est-ce que les fonctions croissantes, positives, injectives, uniformément continues forment un espace vectoriel ? Montrer que Paires somme directe impaire.
2. Projecteurs, symétries : propriétés
3. Automorphismes de $\mathbb{K}$ comme $\mathbb{K}$-ev. Isomorphisme $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ comme $\mathbb{R}$-ev.
4. Somme directes de sev.

Exos

1. Lemmes de factorisation : $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow G$: CNS pour avoir $h \circ f = g$? Dual. On pourra faire démontrer le "lemme de Noël" concernant l'isomorphisme entre un supplémentaire du noyau et l'image.
2. Racine carrée de la dérivation (après avoir fait observer que c'était un endomorphisme de $\mathbb{C}^\infty$.
3. p, q projecteurs, $\text{Im} p \subset \ker q$, $r = p + q - pq$. Mq r est un projecteur, déterminer ses éléments propres.
4. Formes linéaires sur $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui se comportent comme la dérivée en 0 vav du produit ? On peut montrer que non : $\delta(f) = 0$ si positives et nulle en 0 mais c'est le cas général via max etc.
5. D'autres Cassini..

17 Dérivabilité

Questions de cours

1. Dérivée $\Longrightarrow$ dérivabilité
2. Différentiable $\iff$ dérivable

Exos

1. (Difficile) $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \longrightarrow \tilde{f}(x)$. Mq dérivable -> pseudo, réciproque fausse ($|x|$). Montrer que si les nombres dérivés de Dini sont tous positifs, la fonction est croissante (astuce : supposer strictement positifs et passer à la limite).
2. $\sum_{k=0}^{n} f(k/n^2)$ pour $f(0)=0$, f dérivable en 0.
3. $f \in C^\infty$, P de degré impair, $|f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|$ pour tout n, x. Que dire de f ?
4. fC^p, avec $f(x)=o(x^{p-1})$. Mq $f^{(p)}$ s'annule. Avec Darboux, mq D^p suffit. Faux pour $o(x^p)$. [o en les deux infinis].
5. $f:\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ C^∞ avec $f(0)>0$ et $f'(0)>0$, limite nulle à l'infini. Existence d'une suite strictement croissante avec $f^{(n)}(x_n)=0$.
6. Théorème de réalisation de Borel.
7. Injectivité locale.
8. $f \circ f = f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, dérivable ?
9. Darboux via le taux d'accroissement en a et b (joli !)
10. $f(x+y)f(x-y) \leq f^2(x) \Longrightarrow f(t)f''(t) \leq (f'(t))^2$

18 Convexité dérivabilité DL

Exos

1. Monotonie des convexes
2. Régularité des fonctions convexes : continues, dérivables à gauche et à droite en tout point. Si f est convexe et dérivable, elle est C^1 (utiliser Darboux ?)
3. $f(x)=\sum |x-a_n|/3^n$ avec a_n bornée : convexe mais pas dérivable en les a_n
4. Les fonctions convexes forment-elles un sev ? Quelles sont les fonctions convexes et concaves ? Montrer que toute fonction C^2 est somme d'une fonction convexe et d'une fonction concave (décomposer f'').
5. $e^{x_n}+x_n=n$: DA à deux voire trois termes $\ln n - \ln n/n - \ln^2 n/2n^2$. $u_n^5+nu_n-1=0$ DA à deux termes $\frac{1}{n}-\frac{1}{n^6}$.
6. $1+x^a y^b \leq (1+x)^a(1+y)^b$ (avec $a+b=1$) : poser $X=\ln x$ et $Y=\ln y$, étudier $f(u)=1+\exp u$.

19 Ev de dim finie

QDC

1. Un isomorphisme ? Ca envoie une base sur une base
2. Qu'est-ce que la dimension ? Bien défini ? Deux ev de même dimension sont isomorphes. Si E sev de F et $\dim E = \dim F < \infty$ alors $E=F$. Faux en dimension infinie
3. Grassmann.
4. Théorème du rang
5. Base duale

Exos

1. Montrer que la famille des $f_i : P \mapsto P'(x_i)$ ($i \in [0,n]$ et P de degré n) est liée dans E^*. On pourra montrer que si n formes linéaires s'annulent toutes en un point non nul, la famille est liée.
2. $E=E^{**}$
3. Orthogonal, comportement vis-à-vis de la somme directe.
4. E^* sépare les points, et il n'y a pas plus petit

5. Suite des noyaux, elle s'essouffle. Indice de nilpotence.
6. Un anneau intègre fini est un corps. Une algèbre intègre de dim. finie est un corps. Un élément inversible à gauche est inversible à droite en dim. finie.
7. Mq si ϕ laisse stable tous les hyperplans, alors ϕ stabilise les droites, donc est une homothétie.
8. f dans une $\mathbb{K}$-algèbre de dim finie, f inversible $\Longrightarrow$ l'inverse est dans $\mathbb{K}[f]$.
9. f nilpotent, g inversible, qui commutent, alors $f+g$ inversible

20 Polynômes

Questions de cours

1. $K[X]$ est principal (K corps). Réciproque (A anneau commutatif).
2. Division euclidienne
3.

Exercices

1. Un corps fini n'est jamais algébriquement clos
2. Les fonctions trigonométriques ne sont pas des polynômes
3. Une fonction localement polynomiale est un polynôme
4. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer que pour tout $a \ \in \mathbb{C}$, pour tout $\rho > 0$, il existe $b \in \mathbb{C}$ tel que $|b-a| \ < \rho$ et $|P(b)| \ > |P(a)|$.
5. Des majorations classiques : P unitaire, ρ le module de la plus grande racine, montrer que $\rho \leq \max\{1, \sum |a_i|\}$, et $\rho \leq 1 + \sup |a_i|$
6. Soit $a_k > 0$ montrer que les racines du polynôme $P(z) = \sum_k a_k z^k$ sont encadrées par $\min(\frac{a_i}{a_{i+1}})$ et $\max(\frac{a_i}{a_{i+1}})$. On divise, on encadre, on somme géométriquement.
7. A, B deux polynômes réels non constants, $P = A + iB$ on suppose que les racines de P sont de partie imaginaire strictement négative. Montrer que z est réel si et seulement si $|P(z)| = |P(\bar{z})|$. En déduire que les racines de $\lambda A + \mu B$ sont toutes réelles pour λ, μ réels non nuls. (X 2006)
8. P, Q polynômes non constants de $\mathbb{C}[X]$, P, Q ont mêmes racines et $P-1, Q-1$ aussi. Alors $P = Q$.
9. $P \in \mathbb{Q}[X]$ irréductible dans $\mathbb{Q}$ n'a pas de racine double dans $\mathbb{C}$. En déduire que si $P \in \mathbb{Q}[X]$ de degré 5 a une racine multiple dans $\mathbb{C}$ il a une racine dans $\mathbb{Q}$.
10. $P \geq 0$. Mq $\sum P^(i) \geq 0$ et même > 0.
11. Automorphismes de $\mathbb{K}[X]$.
12.

21 Fractions rationnelles

QDC

1. Construction de $K[X]$, de $K(X)$. Un autre exemple d'une telle construction ($\mathbb{Q}$), un corps de caractéristique 2 infini ?

Exercices

1. Montrer qu'un polynôme non constant est surjectif sur $\mathbb{C}$. Montrer qu'une fraction rationnelle non constante prend toutes les valeurs sauf au plus une.
2. Montrer que les fractions rationnelles vérifiant $F(X) = F(1/X)$ s'écrivent $P(X + 1/X)$ où P est un polynôme.

22 Intégration

1. Théorème fondamental de l'analyse
2. Densité des fonctions en escalier
3. Jensen

1. (X...) f continue d'intégrale nulle, α et β les min et max, montrer que $\int_0^1 f^2 \leq -\alpha\beta$.
2. Calculer la limite de $\frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n E(\sqrt{k}) = 2/3$
3. (Découpage en morceaux de même aire) Soit f continue et > 0 sur $[a, b]$, et $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer qu'il existe une unique subdivision en morceaux de même aire
   (b) Calculer la limite de la somme de Riemann associée $= \int f^2 / \int f$ (On pourra introduire $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ et calculer $\int_a^b f \circ F^{-1}(x)dx$)
   (c) Calculer la limite de la moyenne des points de la subdivision $= \int tf / \int f$
4. Limite de $\sqrt[n]{(1 + 1/n)(1 + 2/n) \ldots (1 + n/n)}$
5. Calculer un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$
6. Calculer $\int_0^{2\pi} \ln|x - \exp(it)|dt$ (par des sommes de Riemann bien choisies, puis reconnaître un polynôme, distinguer deux cas)
7. f dérivable en 0, $\alpha \neq 0$ étudier la limite de $\sum_1^n f(1/(n + i\alpha))$
8. (Sage) montrer que pour tous réels $a_0 \ldots a_n$ on a $\sum_{i,j=0}^n \frac{a_i a_j}{1+i+j} \geq 0$
9. Soit f qui échange les deux premières décimales : montrer que c'est Cpm et calculer l'intégrale.
10. À quelle condition la primitive d'une fonction périodique peut-elle être choisie périodique ?
11. Calculer la dérivée de $F(x) = \int_{\exp \sin x}^{2\ \mathrm{ch}(x)} 2\sqrt{t}dt$
12. Calculer une primitive de $\frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}$

23 Matrices

1. Matrices sont classées par leur rang à équivalence près
2. Matrices TS inversibles
3. Matrices de rang 1 ?

1. Formule de Burnside, on considère E un $\mathbb{C}$-ev de dimension n, G un sous-groupe fini de $GL(E)$ et E^G l'ensemble des $x \in E$ stables par G. Montrer que $\dim E^G$ coïncide avec la moyenne des traces.
2. Idéaux bilatères
3. Idéaux à gauche
4. Montrer que M est une matrice de rang $< n$ seulement s'il existe P dans $GL_n(\mathbb{C})$ tel que $P - \lambda M$ soit inversible pour tout λ. On pourra montrer que toute matrice de rang $< n$ est équivalente à une matrice nilpotente. La réciproque est vraie (déterminant). Si $\rangle M = r$, il existe Q inversible tel que $Q - \lambda M$ ne soit pas inversible pour exactement r valeurs de λ Mq les endomorphismes de $M_n(\mathbb{C})$ qui conservent GL_n conservent le rang.
5. Résoudre $X + X^t = \mathrm{Tr}(X)A$.
6. Montrer que l'on ne peut pas avoir $pq - qp = \mathrm{Id}$ dans $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que les crochets de Lie engendrent l'espace vectoriel des matrices de trace nulle. Preuve : montrer que l'on peut obtenir tous les E_{ij} et tous les $E_{ii} - E_{jj}$. Montrer que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle. Montrer (avec $D(1, \ldots n)$) que toute matrice de diagonale nulle est un crochet de Lie. Conclure que toute matrice de trace nulle est un crochet de Lie.
7. Montrer l'unicité de la trace à homothétie près (considérer $\mathrm{Tr}(E_{ij}E_{ji})$ ce qui montre que tous les éléments diagonaux ont même trace. Puis $\mathrm{Tr}(E_{ik}E_{kj}) = 0$.
8. Si M est antisymétrique, $\mathrm{Id} + M$ est inversible.
9. Soit $\lambda \neq 0$, U la matrice de Van der Monde associée à λ et V la matrice de permutation du n-cycle $(123 \ldots n)$. Montrer que $U^j V^k$ forme une base de $m_n(\mathbb{C})$ (considérer le vecteur (0 0 1 0 0)).
10. Montrer que l'ensemble des $pqp^{-1}q^{-1}$, pour p, q matrices $n \times n$ inversibles forment un groupe. Identifier ce groupe. Rappel : $Sl_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections $1 + \lambda E_{i,j}$ $(i \neq j)$.
11. Soit M une matrice de taille $2n$ avec des 0 sur la diagonale et des ± 1 ailleurs. Montrer que M est inversible (dénombrer les dérangements, faire agir $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (via $f \mapsto f^{-1}$) et écrire une équation aux classes.

24 Groupes

1. Théorème de factorisation. Généralités (cyclique, monogène). Un groupe infini où tous les éléments sont d'ordre 2 ?
2. Morphismes de $GL_n(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$? (difficile)
3. Deux éléments de même ordre sont-ils toujours conjugués ? (Non, dans S_n ou dans GL_n).
4. $G/Z(G)$ monogène alors G abélien.
5. Transport de structure.
6. G groupe, $H \subset G$ finie stable par produit, alors H sous-groupe.
7. Abélianisé d'un groupe. On note $\hat{G}$ les morphismes de G. Montrer que $\hat{G} \approx \hat{G^{\text{ab}}}$. On veut montrer que $G \longrightarrow \hat{G}$ est injectif (G abélien fini), pour ça on montre que les représentations irréductibles sont de dimension 1. Cardinalité ? Sommer sur les caractères et sur les x.
8. Si G est un groupe, on définit l'algèbre de groupe $\mathbb{C}G$ comme l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{C}$ par des éléments e_g, avec la loi $e_g e'_g = e_{gg'}$. Montrer que $\mathbb{C}G$ est un anneau commutatif si et seulement G est un groupe commutatif. On suppose que pour tout élément de G, $g^n = 1$. Montrer que $\mathbb{C}G$ contient un idempotent non trivial, i.e. il existe e dans $\mathbb{C}G$ différent de 0 et de 1 et vérifiant $e^2 = e$.

25 Divers

- Équation de Burger-Hopf : méthode des caractéristiques. Cas où la dérivée de la condition initiale est minorée : montrer que cela définit une fonction C^∞.
- On définit les quaternions comme la $\mathbb{R}$-algèbre engendrée par les trois éléments i, j, k soumis aux relations $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Montrer que c'est une algèbre à division, i.e. tout élément non nul admet un inverse. Est-ce que cette algèbre peut être isomorphe à $M_2(\mathbb{R})$?
- Soit z_n une suite de complexes deux à deux distants d'au moins 1. Montrer que la série des $\frac{1}{z_n^3}$ converge. Preuve : montrons qu'elle converge absolument. Par l'absurde, si la suite des $\frac{1}{|z_n^3|}$ diverge , c'est le cas pour tout ré-ordonnement de cette suite, en particulier on peut supposer que la suite des $|z_n|$ est croissante. Mais alors en considérant les aires on a une estimation du type : $2\pi n \leq \pi |z_n|^2$, donc $\frac{1}{|z_n|^3}$ est au plus de l'ordre de $\frac{1}{n^{3/2}}$, ce qui conclut.
- Soit la suite définie par récurrence $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{S_n}$ où S_n est la somme partielle d'indice n. Équivalent de u_n ? On trouve $\sqrt{\ln n}$.
- D.A. à deux termes de $u_{n+1} = u_n + \exp(-u_n)$